

<sup>o</sup>  
**Courbes d'équations cartésiennes polynômiales de degré 2 en  $x, y$ .** X

Déterminer la nature de la conique  $C$  dont l'équation est donnée ci-dessous dans un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer le cas échéant l'axe focal, l'excentricité, le(s) foyer(s) et le(s) directrice(s) associées.

- a)  $x^2 + y^2 + 2xy - x + y - 1 = 0$  ;   b)  $x^2 + y^2 - xy = 9$  ;   c)  $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$  ;  
 d)  $(2x + 3y)^2 + 4x + 5y - 5 = 0$  ;   e)  $xy + 3x + 5y - 4 = 0$  ;   f)  $4x^2 + 10\sqrt{2}xy - y^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$ .

-----  
 Solution :

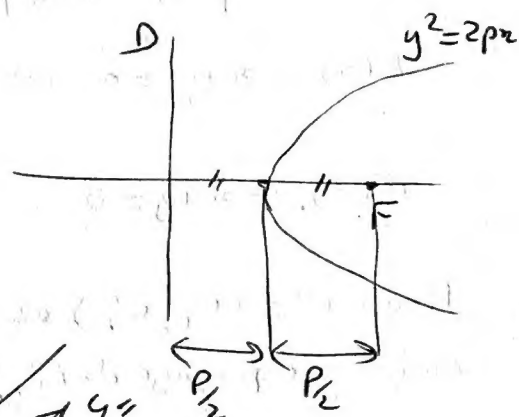
<sup>o</sup>[ucon0019].v1.01 Dany-Jack Mercier (le a) est dans Serfati IV 5.3 p156)



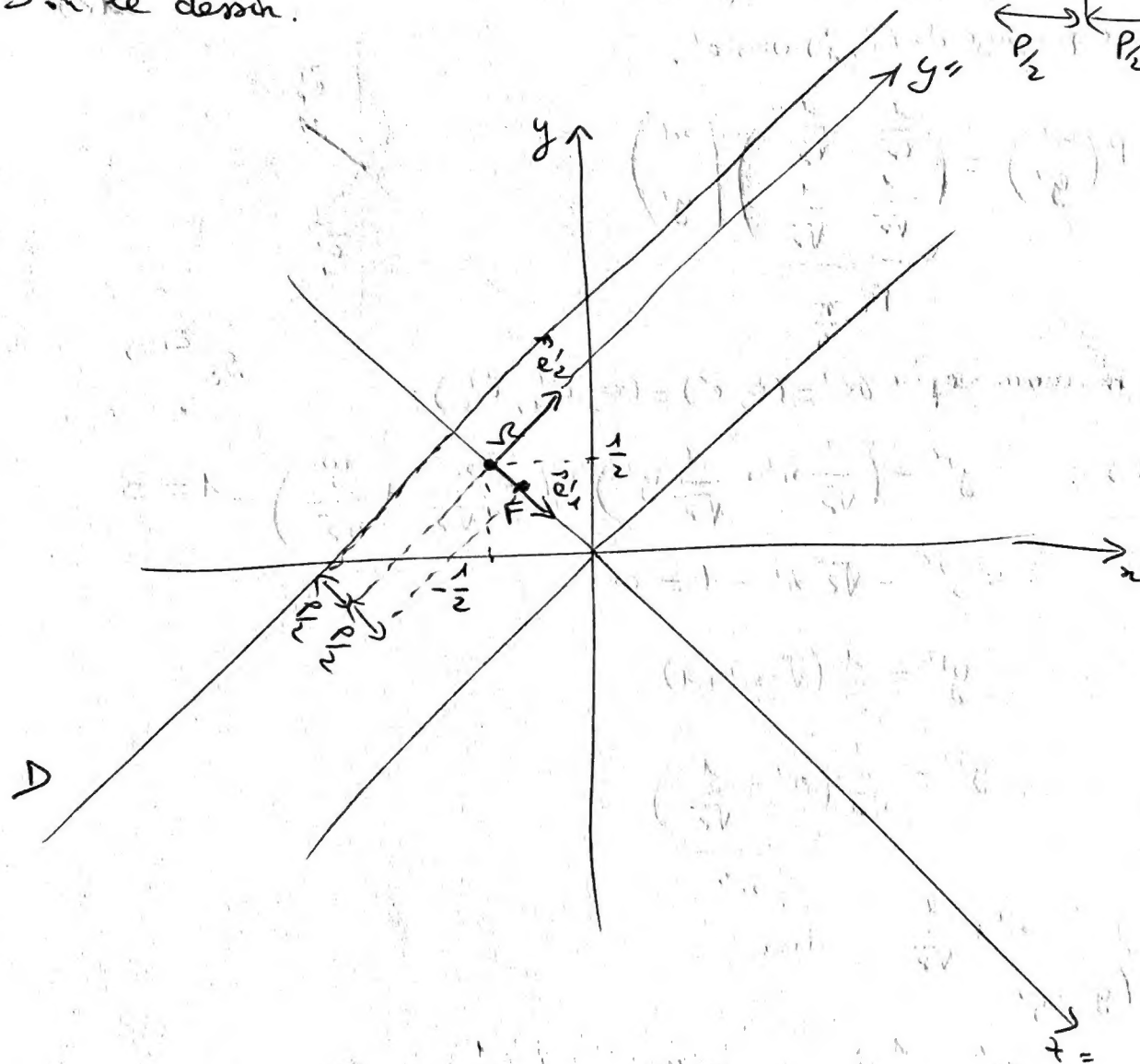
(C) est donc une parabole d'axe de symétrie  $Rx''$ , de sommet  $R$ , et de paramètre  $p = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0,35$ .

Le paramètre  $p$  permet de placer le foyer  $F$  et la directrice  $D$  de la parabole. Dans le nouveau repère  $R''$ , on a :

$$\begin{cases} F = \left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, 0\right) \\ D : x'' = -\frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$



D'où le dessin.



Déterminer la nature de la conique  $C$  d'équation

$$x^2 + y^2 + 2xy - x + y - 1 = 0$$

dans le r.o.  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Déterminer l'axe focal, le(s) foyer(s) et la (les) directrice(s) associées.

- Méthode classique :  $q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  se diagonalise. Comme  $\chi_M(X) = X^2 - 2X$ , on trouve les valeurs propres 0 et 2, et les s.e. propres associés :

$$E_0 : x + y = 0 \quad \text{dirigée par } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$E_2 : x - y = 0 \quad \text{" " } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

etc (elle est développée dans la feuille précédente)

- Solution plus rapide :

$C$  admet l'équation  $(x+y)^2 - (x-y) - 1 = 0$

$$2 \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2 - \sqrt{2} \frac{x-y}{\sqrt{2}} - 1 = 0$$

$$2 \underbrace{\left( \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2}_Y - \sqrt{2} \underbrace{\left( \frac{x-y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_X = 0$$

$$2Y^2 - \sqrt{2}X = 0$$

$$\boxed{Y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} X}$$

dans le r.o.  $(\Omega, X, Y)$  défini par le chgt de coord. :

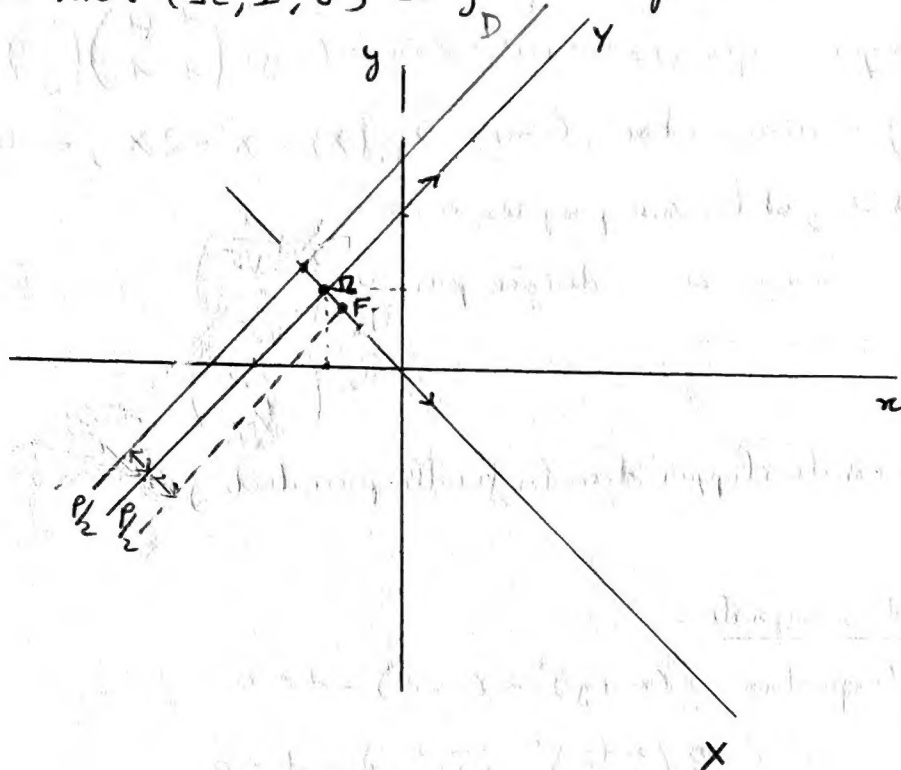
$$\begin{cases} X = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ Y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R_{\frac{\pi}{4}}$  = mat. de la rot. vect. d'angle  $\frac{\pi}{4}$

soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\substack{\vec{I} \quad \vec{J}}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\Omega} \quad (*)$$

Le nouveau r.o.  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$  est facile à placer :



$Y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} X$  est l'éq. réduite d'une parabole d'axe focal  $(\Omega X)$  et de paramètre  $p = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,35$ , ce qui permet de placer le foyer F et la directrice D dans le r.o.  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$  :

$$F \begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D: X = -\frac{p}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

que l'on exprime dans le r.o.  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  grâce aux formules (\*):

$$F \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

$$D: \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$D: x - y = -\frac{5}{4}$$

Fin!

ex: Soit la conique (E) d'équation  $x^2 + y^2 - xy = 9$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer qu'il s'agit d'une ellipse, déterminer ses axes, ses foyers et ses directrices.

sol.: La méthode de Gauss permet d'avoir la signature de la forme quadratique  $q(x, y) = x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$ . Sa signature est  $(2, 0)$ .  $q$  est donc une forme quadratique définie positive et (E) est une ellipse.

(E) a pour équation  $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{12} = 1$  dans le nouveau repère déterminé par les formules de chgt de repère  $\begin{cases} x' = x - \frac{y}{2} \\ y' = y \end{cases}$ . Ce nouveau repère n'étant pas orthonormé, il n'offre pas d'intérêt pour déterminer les caractéristiques de (E).

Cherchons un repère orthonormé où (E) admet une équation réduite.\*

$$\begin{cases} x = ax' + cy' \\ y = bx' + dy' \end{cases}$$

$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  est la matrice de passage de  $(\vec{i}, \vec{j})$  vers  $(\vec{i}', \vec{j}')$

O est le centre de l'ellipse (E) (car centre de symétrie évident)

P doit être orthogonale (car transforme une b.o. en

une b.o.), donc  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$  et  $ac + bd = 0$ .

$$(E): (1-ab)x'^2 + (1-cd)y'^2 - \underbrace{(ad+bc)}_{=0 \text{ (désir)}} x'y' = 9$$

Le système  $\begin{cases} ad+bc=0 \\ a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$  est à résoudre :

1) Si  $c=0$ ,  $\begin{cases} ad=0 \\ a^2+b^2=1 \\ d^2=1 \\ bd=0 \end{cases} \Rightarrow a^2=d^2=1 \text{ et } ad=0$ , impossible.

2) Donc  $c \neq 0$  et  $\begin{cases} acd+bc^2=0 \Rightarrow b(c^2-d^2)=0 \\ a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$ , d'où 2 cas :

α) Si  $b=0$ ,  $a^2=1$  et  $ac=0$  montre une absurdité.

β) Si  $c^2-d^2=0$ ,  $\begin{cases} c^2-d^2=0 \\ a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ c = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \end{cases}$  où  $\varepsilon = \pm 1$  et  $\eta = \pm 1$

et  $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\eta \varepsilon b \\ b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ (où } \varepsilon = \pm 1) \end{cases}$

Conclusion:  $P = \begin{pmatrix} -\frac{\eta \varepsilon}{\sqrt{2}} & \frac{\eta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  où  $\varepsilon, \eta \in \{\pm 1\}$



On trouve les 8 solutions possibles. L'équation réduite de (E) dans ce nouveau repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est :

$$(E): \frac{x'^2}{\frac{18}{2+\eta E}} + \frac{y'^2}{\frac{18}{2-\eta E}} = 1$$

Prenons  $E = \tau = \eta = 1$ , alors :

$$(E): \frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{18} = 1$$

$$\text{et } P = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Avec les notations usuelles :  $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

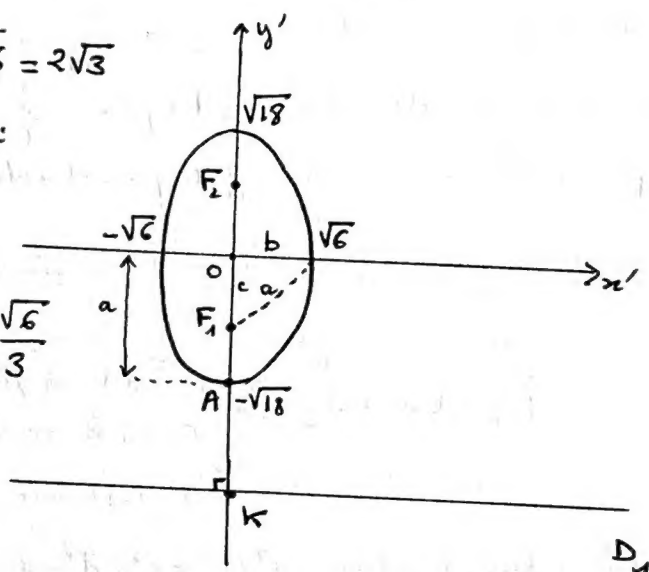
et  $b = \sqrt{6}$ , donc  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{18-6} = 2\sqrt{3}$

et les foyers de (E) ont pour coordonnées :

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

L'excentricité de (E) est  $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

et permet d'obtenir les équations des directrices. Prenons la directrice  $(D_1)$  associée à  $F_1$  :



$$e = \frac{AF_1}{AK} \Rightarrow AK = \frac{AF_1}{e} = \frac{a-c}{e} \Rightarrow OK = a + \frac{a-c}{e} = 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{et : } (D_1): y = 3\sqrt{3}$$

$$(D_2): y = -3\sqrt{3}$$

(\*) Si  $q$  est une forme quadratique (sur un e.v. euclidien  $\vec{E}$ ), on sait l'existence d'une base orthonormée (pour le produit scalaire de  $\vec{E}$ ) dans laquelle la matrice de  $q$  est diagonale (cf N).

Toute conique ayant une équation du type  $q(x, y) = cte$  (dans  $\mathbb{R}^2$ ),

on est assuré, à priori, de l'existence d'une base orthonormée dans laquelle cette conique admet l'équation  $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$  (ou 0)

avec  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  si  $q$  est non dégénérée.

Trouver une équation réduite de la conique d'équation :

$$\mathcal{C}: (2x+3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$$


---

Posez  $x' = 2x + 3y$ .

$$\mathcal{C}: x'^2 + 2x' - 5 = 0$$

$$\Delta' = 1 + 5 = 6$$

$$\text{Les racines sont } -1 \pm \sqrt{6} \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ -7 \end{array} \right.$$

$$M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5 \\ \text{ou} \\ 2x+3y=-7 \end{cases}$$

$\mathcal{C}$  est une conique dégénérée : c'est la réunion de 2 droites parallèles.



Trouver une équation réduite de la conique d'équation :

$$(2x+3y)^2 + 4x + 5y - 5 = 0$$

dans un repère orthonormal. Présenter les formules de changement de repère ainsi que les caractéristiques géométriques de la conique ainsi définie.

NB : C'est une conique dégénérée, la forme quadratique  $q(x,y) = (2x+3y)^2$  étant de signature  $(1,0)$ . Si l'on pose  $x' = 2x+3y$ , on obtient :

$$\mathcal{C} : y = x'^2 + 2x' - 5$$

En posant  $\begin{cases} x' = 2x+3y \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{3}{2}y' \\ y = y' \end{cases}$  on définit un chgt de repère de

matrice de passage :  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$\mathcal{C}$  apparaît comme une parabole d'axe  $(\mathcal{O}, e'_2)$  où  $e'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . C'est tout ce

que peut nous donner la méthode de Gauss. Pour avoir le paramètre de  $\mathcal{C}$ , on choisit la technique générale :

Technique générale :

La forme quad.  $q(x,y) = (2x+3y)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 6xy$  a pour matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \chi_M(X) = X^2 - 13X \quad E(0) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \quad \text{et } E(13) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Dans la base  $e' = (e'_1, e'_2)$  définie par la matrice de passage  $P = P_{e'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

l'équ. de  $\mathcal{C}$  devient :

$$\mathcal{C} : 13y'^2 + 4\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}x' + \frac{2}{\sqrt{13}}y'\right) + 5\left(\frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'\right) - 5 = 0$$

$$13y'^2 - \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{23}{\sqrt{13}}y' - 5 = 0$$

$$13\left(y' + \frac{23}{26\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{23^2}{52\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}}x' - 5 = 0$$

$$\text{soit } 13 \underbrace{\left( y' + \frac{23}{26\sqrt{13}} \right)^2}_{y''} - \frac{2}{\sqrt{13}} \underbrace{\left( x' + \frac{529}{104} + \frac{5\sqrt{13}}{2} \right)}_{x''} = 0$$

$$13y''^2 = \frac{2}{\sqrt{13}} x''$$

$$\boxed{y''^2 = \frac{2}{13\sqrt{13}} x''}$$

dans le rep. orthonormal  $(\Omega, e_1'', e_2'')$  défini

par les formules de chgt de repères :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' - \frac{529}{104} - \frac{5\sqrt{13}}{2} \\ y'' - \frac{23}{26\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

$$\text{ie } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3 \times 529}{104\sqrt{13}} + \frac{15}{2} - \frac{23}{169} \\ -\frac{2 \times 529}{104\sqrt{13}} - 5 - \frac{69}{26 \times 13} \end{pmatrix} \\ \doteq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

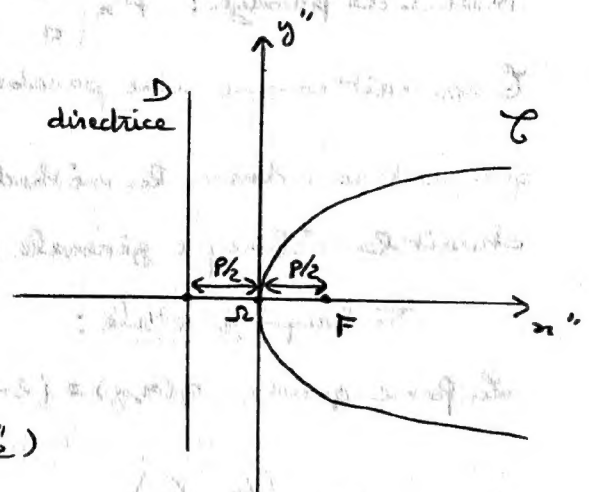
Cel : c'est la parabole d'axe  $(\Omega, x'')$

soit  $\Omega \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  et  $\vec{\Omega x''} = \mathbb{R} e_1''$ , de

paramètre  $p = \frac{1}{13\sqrt{13}}$  (penser à  $y^2 = 2px$ )

donc de foyer  $F \begin{pmatrix} p/2 \\ 0 \end{pmatrix}$  dans le repère  $(\Omega, e_1'', e_2'')$

(ie  $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} p/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  dans le repère  $(O, e_1, e_2)$  initial)



Trouver une équation réduite de la conique :

$$\mathcal{C}: xy + 3x + 5y - 4 = 0$$

Préciser les formules de chgt de repère, le centre, les foyers et les directrices de  $\mathcal{C}$ , s'il y a lieu.

\*  $\text{Mat}(q; e) = M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$  où  $e$  désigne la base canonique.

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} -X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -X \end{vmatrix} = X^2 - \frac{1}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$$

Le sc  $E(\frac{1}{2})$  associé à  $\frac{1}{2}$  est la dte  $\mathbb{R}e'_1$  où  $e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

"  $E(-\frac{1}{2})$  "  $-\frac{1}{2}$  "  $\mathbb{R}e'_2$  où  $e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

La matrice de passage de  $e$  à  $e' = (e'_1, e'_2)$  est  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\text{Mat}(q; e') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{donc } xy = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

$$\mathcal{C}: \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + 3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) - 4 = 0$$

$$\text{d'où } \mathcal{C}: x'^2 + 8\sqrt{2}x' - y'^2 - 2\sqrt{2}y' - 8 = 0$$

$$(x' + 4\sqrt{2})^2 - 32 - (y' + \sqrt{2})^2 - 2 = 0$$

$$(x' + 4\sqrt{2})^2 - (y' + \sqrt{2})^2 = 38$$

$$\frac{(x' + 4\sqrt{2})^2}{38} - \frac{(y' + \sqrt{2})^2}{38} = 1$$

$$\mathcal{C}: \boxed{\frac{x''^2}{38} - \frac{y''^2}{38} = 1} \quad \text{est l'équation d'une hyperbole.}$$

Les formules de chgt de repères sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{où } \begin{cases} x' = x'' - 4\sqrt{2} \\ y' = y'' - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ie } \boxed{\begin{cases} x = \frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} - 5 \\ y = \frac{x''}{\sqrt{2}} - \frac{y''}{\sqrt{2}} - 3 \end{cases}}$$

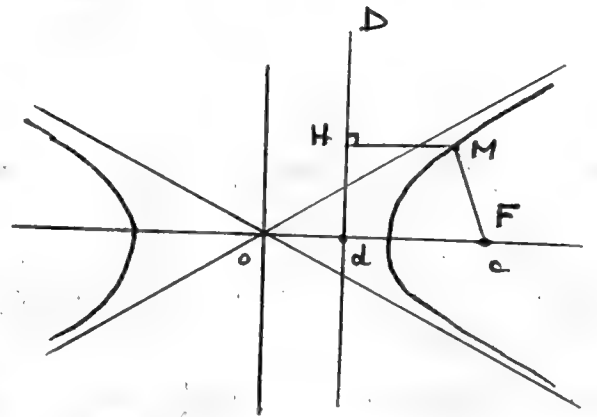
Le centre de symétrie de  $\mathcal{C}$  est la nouvelle origine  $\Omega \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ , les axes de symétrie sont les axes du nouveau repère  $Ox'' = (\Omega, 1Re'_1)$  et  $Oy'' = (\Omega, 1Re'_2)$  (parallèles aux bissectrices du repère  $(O, e_1, e_2)$ )

\* Recherche des foyers et directrices :

L'équation réduite de  $\mathcal{C}$  est :

$$\frac{x^2}{38} - \frac{y^2}{38} = 1 \quad \text{dans le nouveau repère.}$$

Pour déterminer foyers et directrices, on écrit l'équation de  $\mathcal{C}$  sous la forme  $(x-c)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2$



$$\frac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2$$

$$\mathcal{C}: y^2 = x^2 - 38$$

Posons  $x-c = x'$ .  $\mathcal{C}: y^2 = (x'+c)^2 - 38$

$$y^2 = x'^2 + 2cx' + c^2 - 38$$

$$x'^2 + y^2 = \underbrace{2cx' + c^2 - 38}_{\text{on cherche } c \text{ de sorte que ce trinôme en } x' \text{ admette une racine double.}}$$

on cherche  $c$  de sorte que ce trinôme en  $x'$  admette une racine double.

$$\Delta' = c^2 - 2(c^2 - 38) = 76 - c^2$$

Prends donc  $c = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ . La racine est  $x' = -\frac{c}{2} = -\sqrt{19}$  d'où :

$$\mathcal{C}: x'^2 + y^2 = 2(x' + \sqrt{19})^2$$

$$\boxed{\mathcal{C}: (x - 2\sqrt{19})^2 + y^2 = 2(x - \sqrt{19})^2}$$

C'est l'équation focale de la conique  $\mathcal{C}$ .

Les foyers de  $\mathcal{C}$  sont  $F \begin{pmatrix} \pm 2\sqrt{19} \\ 0 \end{pmatrix}$  et les directrices ont pour équations  $x = \pm \sqrt{19}$ .

L'excentricité  $e$  vaut  $e = \sqrt{2}$ .

NB : On peut vérifier  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2 \times 38}}{\sqrt{38}} = \sqrt{2}$ .

Une conique est donnée par l'équation cartésienne dans un repère orthonormal  $R = (e_1, e_2)$  :

$$C: 4x^2 + 10\sqrt{2}xy - y^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$$

Trouver la nature de  $C$  ; son équation réduite dans un repère orthonormal convenable, préciser aussi les formules de changement de repères.

$$C: 4x^2 + 10\sqrt{2}xy - y^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$$

$q(x, y) = 4x^2 + 10\sqrt{2}xy - y^2$  admet la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 4-X & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & -1-X \end{vmatrix} = X^2 - 3X - 54 = (X-9)(X+6)$$

\* Cherchons les sev propres de  $M$  : ce sont des droites orthogonales.

$$E(9): 5\sqrt{2}x - 10y = 0$$

$E(9)$  est la dte vectorielle dirigée par  $\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ , ou encore par  $e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$  qui est unitaire.

$E(-6)$  sera donc la droite  $\mathbb{R}e'_2$  avec  $e'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$  unitaire.

\* Notons  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  les coordonnées dans la nouvelle base  $e' = (e'_1, e'_2)$ .

On aura :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{\doteq P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ q(x, y) = q(x', y') = 9x'^2 - 6y'^2 \end{cases} \quad (1)$$

L'équation de  $\mathcal{C}$  devient, dans le nouveau repère  $R' = (O, e'_1, e'_2)$ :

$$\mathcal{C}: 9x'^2 - 6y'^2 + \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{3} \left( \frac{2}{\sqrt{6}} x' - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} y' \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} x' + \frac{2}{\sqrt{6}} y' \right)}_{\left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) x' + \left( \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{6}} \right) y'} - 1 = 0$$

$$\left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) x' + \left( \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{6}} \right) y' = x'$$

$$\mathcal{C}: 9x'^2 - 6y'^2 + x' - 1 = 0$$

$$9 \left( x' + \frac{x'}{9} \right) - 6y'^2 - 1 = 0$$

$$9 \left[ \left( x' + \frac{1}{18} \right)^2 - \frac{1}{18^2} \right] - 6y'^2 - 1 = 0$$

$$9 \left( x' + \frac{1}{18} \right)^2 - 6y'^2 - \frac{37}{36} = 0$$

Poseons  $\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{18} \\ y'' = y' \end{cases} \quad (2)$

On obtient l'équation réduite :

$$\mathcal{C}: \frac{x''^2}{\frac{37}{36 \times 9}} - \frac{y''^2}{\frac{37}{36 \times 6}} = 1$$

C'est une hyperbole d'axes ceux du nouveau repère  $R'' = (O, e''_1, e''_2)$  dans lequel les coordonnées d'un point sont  $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ . Les formules de passage de  $R$  vers  $R''$  sont données par (1) et (2):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'' - \frac{1}{18} \\ y'' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{P}_{\text{chgt de base}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{18\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{18\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{\text{coord. de la n}^{\text{elle}} \text{ origine } R \text{ dans l'ancien repère } R}$$

chgt de base

coord. de la n<sup>elle</sup> origine  $R$  dans l'ancien repère  $R$



Discuter suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  la nature de la courbe  $\mathcal{C}_m$  dont une équation, dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est

$$y^2 + mx^2 + (m+1)x - \frac{m}{4} = 0$$

-----  
Solution :

Discuter suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  la nature de la courbe  $\mathcal{C}_m$  dont une équation dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est

$$y^2 + mx^2 + (m+1)x - \frac{m}{4} = 0$$

\* Si  $m=0$ ,  $y^2 = -x$  et  $\mathcal{C}$  est une parabole.

\* Si  $m \neq 0$ ,

$$\mathcal{C}_m : y^2 + m \left( x^2 + \frac{m+1}{m} x \right) - \frac{m}{4} = 0$$

$$m \left( x + \frac{m+1}{2m} \right)^2 + y^2 = \frac{(m+1)^2 + m^2}{4m}$$

$$\mathcal{C}_m : \frac{\left( x + \frac{m+1}{2m} \right)^2}{\frac{2m^2 + 2m + 1}{4m^2}} + \frac{y^2}{\frac{2m^2 + 2m + 1}{4m}} = 1$$

Ainsi :

Lorsque  $m > 0$ ,  $\mathcal{C}_m$  est une ellipse de centre  $\Omega \begin{pmatrix} -\frac{m+1}{2m} \\ 0 \end{pmatrix}$  et d'axes  $Ox, Oy$ .

Lorsque  $m < 0$ ,  $\mathcal{C}_m$  est une hyperbole d'axe focal  $Ox$  et de centre  $\Omega$ .

$E$  désigne l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Un cercle  $C$  coupe  $E$  en 4 points distincts  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . On note  $(a \cos \theta_i, b \sin \theta_i)$  les coordonnées de  $M_i$  pour  $1 \leq i \leq 4$ . Démontrer que  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

-----  
Solution :

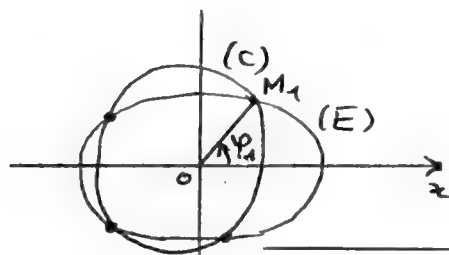
(E) désigne l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans un repère orthonormal  $(O, O_x, O_y)$ . Un cercle (C) coupe (E) en quatre points distincts  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , et l'on pose

$$M_i \begin{pmatrix} a \cos \theta_i \\ b \sin \theta_i \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq 4$$

Démontrer que  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \equiv 0 \pmod{2\pi}$

Les eq. paramétriques de (E) sont :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$



Soit (C) :  $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$

$\theta$  sera l'un des  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , si il vérifie :

$$a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + c a \cos \theta + d b \sin \theta + e = 0$$

Posez  $z = e^{i\theta}$ , alors  $z$  est solution de l'équation du 4ème degré :

$$a^2 \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + b^2 \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + ac \frac{z + \bar{z}}{2} + bd \frac{z - \bar{z}}{2i} + e = 0$$

$$\frac{a^2}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - \frac{b^2}{4} \left( z - \frac{1}{z} \right)^2 + \left( \frac{ac}{2} + \frac{bd}{2i} \right) z + \left( \frac{ac}{2} - \frac{bd}{2i} \right) \frac{1}{z} + e = 0$$

$$\left( \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) z^4 + \left( \frac{ac}{2} + \frac{bd}{2i} \right) z^3 + \left( \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + e \right) z^2 + \left( \frac{ac}{2} - \frac{bd}{2i} \right) z + \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0$$

Le produit des racines  $e^{i\theta_j}$ ,  $1 \leq j \leq 4$ , sera  $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$ , soit :

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

CQFD

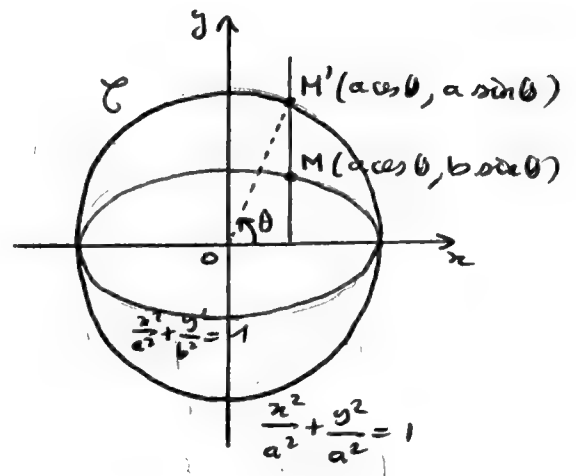
.../...

NB : Interprétation de  $\theta$ , où  $M(a \cos \theta, b \sin \theta)$  est sur l'ellipse  $E$  :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$E$  est l'image du cercle  $\mathcal{C}$  :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
 par l'affinité de base  $Ox$ , de dir.  $Oy$   
 et de rapport  $\frac{b}{a}$ .

$\theta$  est donc l'angle  $(\vec{Ox}, \vec{OM'})$ .



Montrer que l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = 3 + \sin t \end{cases} \quad \text{où } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

est inclus dans une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.  
Dessiner cet arc.

-----  
Solution :



Trouver une équation cartésienne de l'arc paramétré

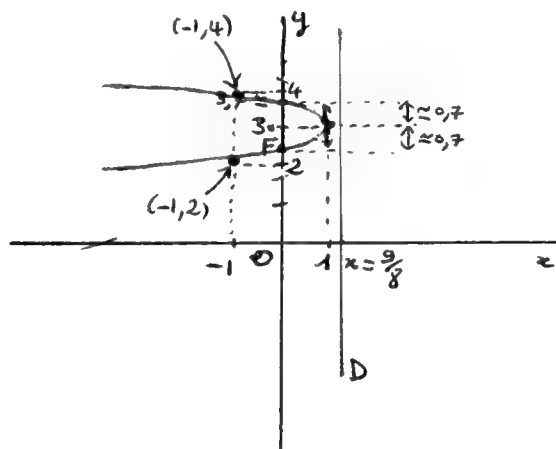
$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = 3 + \sin t \end{cases} \quad \text{où } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Montrer que cet arc est inclus dans une parabole dont on précisera le foyer et la directrice. Dessiner cette parabole.

$$x(t) = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2(y-3)^2$$

$$x = -2y^2 + 12y - 17$$

Il s'agit d'une parabole de sommet  $\left(\frac{1}{3}\right)$  puisque  $x' = -4y + 12 = 0$ ssi  $y = 3$ , d'où  $x(3) = 1$ . L'axe de cette parabole est // à Ox et elle tourne sa concavité vers les  $x < 0$ .



Remarques:

\* Paramètre de cette parabole ? →

Plus rapide:  $2(y-3)^2 = 1-x$

$$y'^2 = \frac{1}{2} x' = 2p x'$$

donc  $\boxed{p = \frac{1}{4}}$

$$\begin{aligned} x &= -2(y^2 + 6y) - 17 = -2[(y+3)^2 - 9] - 17 \\ &= -2(y+3)^2 + 1 \end{aligned}$$

chgt de repère:  
 $\begin{cases} x = -x' + 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

$$(y+3)^2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y^2 = +\frac{1}{2}x \quad \text{dans le nouveau repère défini par le chgt de coord} \quad \begin{cases} X = -x + 1 \\ Y = y + 3 \end{cases}$$

Le paramètre  $p$  de cette parabole sera  $p = +\frac{1}{4}$

\* On en déduit que le foyer  $F$  est  $F\left(1 - \frac{1}{8}, 3\right)$  et que la directrice associée est d'équation  $x = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

$t \mapsto 3 + \sin t$  a pour image  $[2, 4]$  quand  $t$  décrit  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$t \mapsto \cos 2t$  "  $[-1, 1]$  "  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ainsi, si l'on note  $\mathcal{C}$  l'arc paramétré de l'énoncé et  $\mathcal{P}$  la parabole  $x = -2y^2 + 2y - 17$ , on a montré :

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{P} \cap ([-1, 1] \times [2, 4])$$

Réc., si  $M \in \mathcal{P} \cap ([-1, 1] \times [2, 4])$ , il existe  $t$  tq  $y = 3 + \sin t$  et

$$\begin{aligned} x &= -2(3 + \sin t)^2 + 12(3 + \sin t) - 17 \\ &= 1 - 2\sin^2 t \\ &= \cos 2t \end{aligned}$$

donc  $M \in \mathcal{C}$ .

Cd:  $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cap ([-1, 1] \times [2, 4])$

**Construction d'une ellipse inscrite dans un rectangle.**

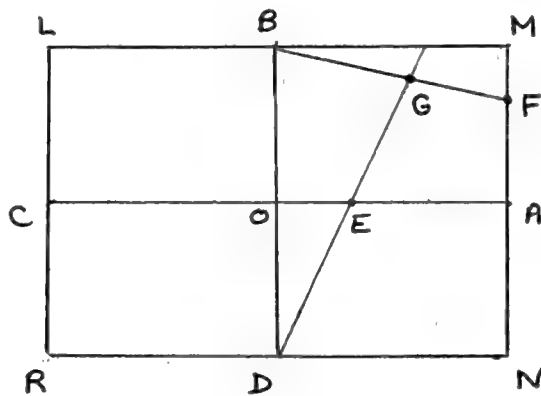
Soient  $LMNR$  un rectangle de centre  $O$ ,  $A$  le milieu de  $[MN]$ ,  $B$  celui de  $[LM]$  et  $D$  celui de  $[AN]$ . On trace les points  $E \in [OA]$  et  $F \in [MA]$  tels que  $\frac{OE}{OA} = \frac{MF}{MA}$ . Montrer que le point  $G$  d'intersection des droites  $(BF)$  et  $(DE)$  appartient à l'ellipse inscrite dans le rectangle  $LMNR$ .

-----  
Solution :

---

<sup>0</sup>[ucon0029] Dany-Jack Mercier  
cf. article "Peut-on commencer par les statistiques ?" de R. Arnaud, Repère n°6 de janvier 1992.

# Construction d'une ellipse inscrite dans un rectangle



Les points E et F vérifient :

$$\frac{OE}{OA} = \frac{MF}{MA}$$

et appartiennent respectivement aux segments  $[OA]$  et  $[MA]$ .

Hq G appartient à l'ellipse  $\mathcal{E}$  inscrite dans le rectangle LMNR.

On montre que les coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  de G vérifient  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  où  $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ .

Soit  $k \in [0, 1]$ , et :  $OE = kOA$ ,  $MF = kOB$ .

On a :  $E\begin{pmatrix} ka \\ 0 \end{pmatrix} \quad F\begin{pmatrix} a \\ b - kb \end{pmatrix}$

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (DE) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} ka \\ b \end{pmatrix}$$

$$(BF) : \begin{vmatrix} x & a \\ y - b & (b - kb) - b \end{vmatrix} = 0$$

$$-kbx - ay + ab = 0$$

$$GE(BF) \text{ donc } -kb(\lambda ka) - a(-b + \lambda b) + ab = 0$$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{2}{1+k^2}, \text{ et les coordonnées de G :}$$

$$G\begin{pmatrix} \frac{2ka}{1+k^2} \\ b \frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que  $G \in \mathcal{E}$ , ie :

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{2ka}{1+k^2} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left( b \frac{1-k^2}{1+k^2} \right)^2 = 1$$

qui est trivialement vérifiée.

**Construction d'une ellipse inscrite dans un rectangle.**

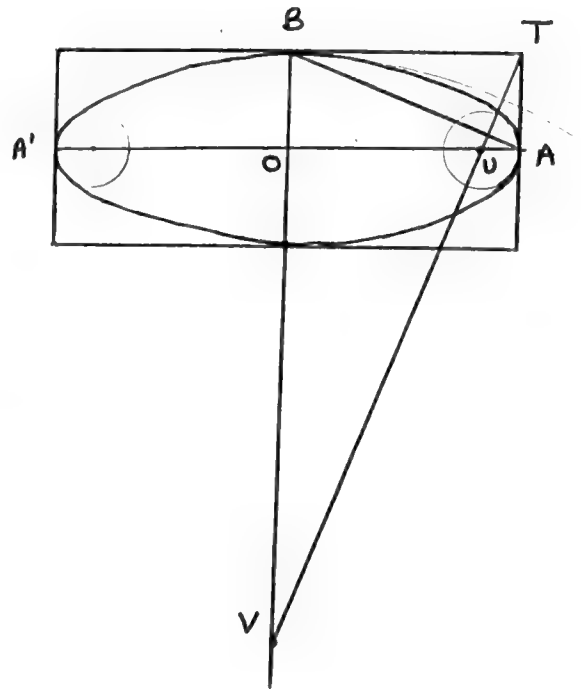
On considère l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans un repère orthonormal  $\mathcal{R}$  du plan. Soient  $O(0,0)$ ,  $A(a,0)$ ,  $B(0,b)$  et  $T(a,b)$ . La perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $T$  coupe les droites  $(OA)$  et  $(OB)$  respectivement en  $U$  et  $V$ . Montrer que le cercle  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{C}'$ ) de centre  $U$  (resp.  $V$ ) et de rayon  $UA$  (resp.  $VB$ ) est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de l'ellipse et tangent en  $A$  (resp.  $B$ ) à cette ellipse.

-----  
Solution :

# CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE

Justifiez le résultat suivant permettant la construction précise d'une ellipse  $\mathcal{E}$  d'axes  $[AA']$  et  $[BB']$  données ( $AA' > BB'$ ) :

- La perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $T$  coupe les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  resp. en  $U$  et  $V$ .
- Le cercle  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ) de centre  $U$  (resp.  $V$ ) et de rayon  $UA$  (resp.  $VB$ ) est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de l'ellipse  $\mathcal{E}$ , et tangent en  $A$  (resp.  $B$ ) à cette ellipse.



Dans le r.o.  $(O, \frac{\vec{OA}}{OA}, \frac{\vec{OB}}{OB})$ , l'ellipse  $\mathcal{E}$  admet l'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

$$T(a, b) \text{ donc } (AB): y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$(TV): y = \frac{a}{b}(x - a) + b$$

$$\text{D'où } U \left( a - \frac{b^2}{a}, 0 \right) \text{ et } V \left( 0, -\frac{a^2}{b} + b \right)$$

$$\text{En posant } c^2 = a^2 - b^2, \text{ on obtient } U \left( \frac{c^2}{a}, 0 \right), V \left( 0, -\frac{c^2}{b} \right).$$

Les équations des cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont faciles à obtenir. Par exemple :

$$\mathcal{C}_1: \left( x - \frac{c^2}{a} \right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

Dire que tout point  $M \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right)$  de l'ellipse  $\mathcal{E}$  se trouve à l'extérieur du cercle  $\mathcal{C}_1$  revient à dire que

$$P(x) = \left( x - \frac{c^2}{a} \right)^2 + b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{b^4}{a^2}$$

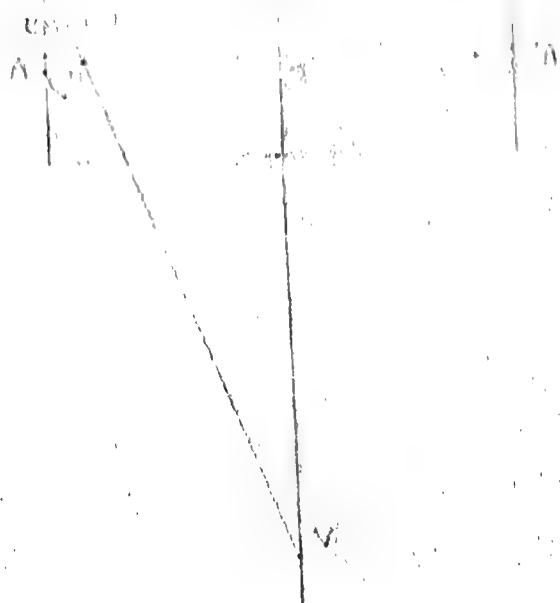
est positif pour tout  $x \in [-a, a]$ .



On trouve bien :

$$P(x) = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2 \frac{c^2}{a} x + c^2 = \left( \frac{c}{a} x - c \right)^2 \geq 0$$

Enfin  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{L}_1$  admettent la même tangente en  $A$ , à savoir  $(AT)$ .  $\square$



Quelle est la nature de la courbe représentée par l'équation suivante dans un repère orthonormal :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - e^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 = 0$$

-----  
Solution :

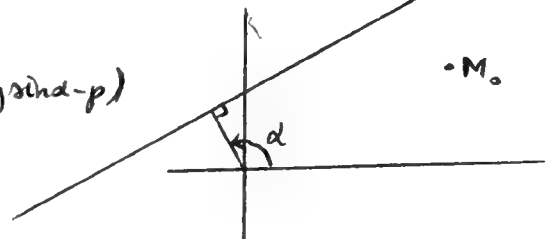
Quelle est la nature de la courbe représentée par l'équation suivante dans un repère orthonormal :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - e^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 = 0$$

Discuter suivant les valeurs de  $x_0, y_0, \alpha$  et  $p$ .

Posons  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et  $D_\alpha =$  droite d'équation  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$

$$d(M, D_\alpha) = \frac{|x \cos \alpha + y \sin \alpha - p|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = |x \cos \alpha + y \sin \alpha - p|$$



permet de ré-écrire l'équation de cette conique :

$$\|\vec{MM_0}\|^2 = e^2 d(M, D_\alpha)^2$$

soit 
$$\frac{MM_0}{d(M, D_\alpha)} = e$$

Il s'agit d'une conique d'excentricité  $e$ , de foyer  $M_0$  et de directrice associée  $D_\alpha$  (...)

**Section d'un cylindre.**

- a) Soit  $r$  un réel strictement positif. On considère le cylindre de révolution  $C$  d'équation  $x^2 + y^2 = r^2$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et l'on se donne un plan  $P_\theta$  passant par  $O$  et faisant un angle de mesure  $\theta$  (différent de  $\frac{\pi}{2}$ ) modulo  $\pi$  avec le plan de coordonnées  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer que l'intersection  $C \cap P_\theta$  est une ellipse et déterminer la longueur de son demi-grand axe.
- b) Application : Un tronc d'arbre ayant la forme d'un cylindre de révolution est posé horizontalement sur le sol. On pratique deux découpes verticales du tronc suivant des plans perpendiculaires entre eux mais non parallèles à l'axe du tronc. Le segment le plus long de la première découpe mesure 60 cm et celui de la deuxième découpe 80 cm. Quel est le diamètre du tronc ?
- c) Peut-on retrouver le résultat de la question b) sans utiliser la question a) ? (Ind. : penser aux relations métriques dans le triangle rectangle)

---

**Solution :**

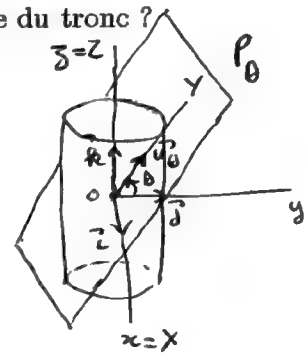
**Sections d'un cylindre :**

a) Soit  $r$  un réel strictement positif. On considère le cylindre de révolution  $C$  d'équation  $x^2 + y^2 = r^2$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et l'on note  $P_\theta$  le plan passant par  $O$  faisant un angle de mesure  $\theta$  modulo  $\pi$  avec le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer que l'intersection  $C \cap P_\theta$  est une ellipse et déterminer la longueur de son demi-grand axe.

b) Application : Un tronc d'arbre ayant la forme d'un cylindre de révolution est posé horizontalement sur le sol. On pratique deux découpes verticales du tronc suivant des plans perpendiculaires entre eux mais non parallèles à l'axe du tronc. Le segment le plus long de la première découpe mesure 60 cm et celui de la deuxième découpe 80 cm. Quel est le diamètre du tronc ?

c) Retrouver le résultat de la question b) en utilisant le Th de Pythagore

Solution :



a)  $C \cap P_\theta : \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ (x, y) \in P_\theta \end{cases}$

On peut supposer que  $\vec{z}$  dirige  $(O, \vec{i}, \vec{j}) \cap P_\theta$ .

Une base de  $P_\theta$  est  $(\vec{z}, \vec{u}_\theta)$  où  $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k}$ .

Soient les repères  $R' = (O, \vec{z}, \vec{u}_\theta, \vec{k})$  et  $R = (O, \vec{z}, \vec{j}, \vec{k})$ . La matrice de passage est

$$P_{R'}^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & 1 \end{pmatrix}$$

donc les formules de chgt de repère sont

$$\begin{cases} x = x \\ y = \cos \theta \cdot y \\ z = \sin \theta \cdot y + z \end{cases}$$

Puisque  $C \cap P_\theta : \begin{cases} X^2 + \cos^2 \theta Y^2 = r^2 \\ Z = 0 \end{cases}$ , et  $C \cap P_\theta$  est l'ellipse de  $P_\theta$

d'équation  $\frac{X^2}{r^2} + \frac{Y^2}{\frac{r^2}{\cos^2 \theta}} = 1$ . En supposant  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (ce qui est toujours possible), on trouve que  $C \cap P_\theta$  est l'ellipse de centre  $O$ , de demi-grand axe  $\frac{r}{\cos \theta}$

<sup>0</sup>[ucon0032] Dany-Jack Mercier

Le b) a été posé par une PE1 sous forme de devinette.

et de demi-petit axe  $r$  porté par  $Ox$ .<sup>1</sup>

NB : Si  $\theta$  est donné modulo  $2\pi$ , le demi-grand axe sera  $\frac{r}{|\cos \theta|}$ .

d'une ellipse d'axes  $(0, \vec{z})$  et  $(0, \vec{u}_\theta)$  et de demi-grand axe  $\frac{r}{|\cos \theta|}$

suite

b) Ici les 2 plans de coupe sont perpendiculaires entre eux, donc il s'agit de  $P_\theta$  et  $P_{\theta+\frac{\pi}{2}}$  et l'on peut supposer  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

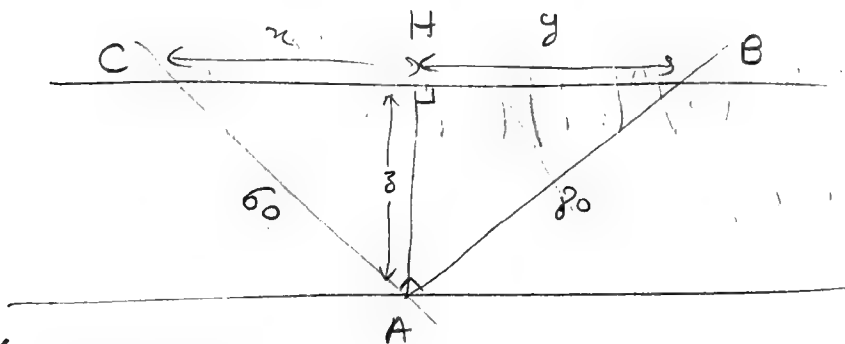
Or a, si  $r$  désigne le rayon du tronc (et d'après a) :

$$\begin{cases} \frac{r}{|\cos \theta|} = 30 \\ \frac{r}{|\cos(\theta + \frac{\pi}{2})|} = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 30 \cos \theta \\ r = 40 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{r^2}{30^2} + \frac{r^2}{40^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r = 24 \text{ cm}}$$

c)



$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 60^2 \\ y^2 + z^2 = 80^2 \\ (x+y)^2 = 60^2 + 80^2 = 10000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 10000 \Rightarrow 3600 + 6400 + 2xy = 10000 \Rightarrow 2xy = 10000 - 10000 = 0 \Rightarrow xy = 0$$

meilleure solution  
~~donc  $z = 48 \text{ cm}$~~

$$BC^2 = 60^2 + 80^2 = 3600 + 6400 = 10000 \Rightarrow \boxed{BC = 100}$$

Poursuite  $AH \times BC = AC \times AB \Leftrightarrow AH = \frac{60 \times 80}{100} = 48 \text{ cm}$



### Triangle inscrit dans une hyperbole équilatère.

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $ABC$  un triangle inscrit dans l'hyperbole équilatère  $\mathcal{H}$  d'équation  $xy = k$  avec  $k > 0$ . On note  $D_A$  la hauteur issue de  $A$  du triangle  $ABC$ , et  $a, b, c$  les abscisses respectives des points  $A, B$  et  $C$ .

- 1) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de  $D_A$  et de l'hyperbole  $\mathcal{H}$  ? En déduire que l'orthocentre  $D$  du triangle  $ABC$  appartient à l'hyperbole.
- 2) Montrer que  $D = A$  si, et seulement si, la droite  $D_A$  est tangente à l'hyperbole.
- 3) Montrer que, de façon générale, deux hyperboles passant par 4 points distincts  $A, B, C, D$  et admettant la même tangente en  $A$  sont égales. On admettra le résultat similaire suivant : "deux hyperboles passant par 3 points distincts  $A, B, C$  et admettant la même tangente en deux de ces points sont égales".
- 4) Montrer que si deux hyperboles équilatères distinctes se coupent en 4 points distincts, alors chacun de ces points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points.
- 5) On suppose ici que les deux hyperboles équilatères distinctes  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  sont tangentes en un point  $A$  et se coupent en deux autres points distincts  $B$  et  $C$ . Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ , et que la hauteur  $D_A$  issue de  $A$  du triangle  $ABC$  est une tangente commune aux deux hyperboles.
- 6) Le cercle  $\mathcal{S}$  circonscrit au triangle  $ABC$  admet l'équation  $x^2 + y^2 - 2rx - 2sy + t = 0$ . Exprimer l'abscisse du quatrième point d'intersection de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{H}$  en fonctions de  $a, b, c$ . En déduire que le cercle passe par le symétrique  $D'$  de l'orthocentre  $D$  du triangle  $ABC$  par rapport à l'origine  $O$ .
- 7) On suppose ici que le triangle  $ABC$  est équilatéral et inscrit dans l'hyperbole équilatère  $\mathcal{H}$ . Montrer que le centre  $\Omega$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  appartient à  $\mathcal{H}$ , puis que le symétrique  $\Omega'$  de  $\Omega$  par rapport à  $O$  appartient à la fois au cercle circonscrit à  $ABC$  et à  $\mathcal{H}$ .

-----  
Solution :

Autres questions : voir manuscript AG42.

- 3) Supposons que les hyperboles  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  passent par les 4 points  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$  et admettent la même tangente en  $A$ . On peut toujours se placer dans un repère dont les axes sont les asymptotes de  $\mathcal{H}$ , et noter

$$P(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

l'équation de  $\mathcal{H}'$  dans ce repère. Les points de  $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$  sont caractérisés par

$$\begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ Q(x) = x^2 P(x, \frac{k}{x}) = ax^4 + dx^3 + (kc + f)x^2 + kex + k^2b = 0 \end{cases}$$

Le polynôme  $Q(x) = x^2 P(x, \frac{k}{x})$  admet 4 racines distinctes, à savoir  $x_A, x_B, x_C, x_D$ . La tangente  $T$  à  $\mathcal{H}'$  en  $A$  admet l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_A, y_A)(x - x_A) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_A, y_A)(y - y_A) = 0$$

<sup>0</sup>[ucon0036] v1.01 Dany-Jack Mercier (cf. III.1 et III.2 du CAPES ext. 1997, 2ème comp., AG42 avec des modifications mineures. III.1.1 = 1), III.1.2 = 2), III.1.3 = 4), III.1.4 = 5), III.2.1 et III.2.2 = 6.b).

$T$  est aussi par hypothèse la tangente à  $\mathcal{H}$  en  $A$ , donc admet aussi l'équation

$$y - y_A = -\frac{k}{x_A^2} (x - x_A) \quad \text{soit} \quad \frac{k}{x_A^2} (x - x_A) + y - y_A = 0$$

On aura donc

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x}(x_A, y_A) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_A, y_A) \\ \frac{k}{x_A^2} & 1 \end{array} \right| = \frac{\partial P}{\partial x}(x_A, y_A) - \frac{k}{x_A^2} \frac{\partial P}{\partial y}(x_A, y_A) = 0$$

Dérivons  $Q(x)$  :

$$Q'(x) = 2xP\left(x, \frac{k}{x}\right) + x^2 \left( \frac{\partial P}{\partial x}\left(x, \frac{k}{x}\right) - \frac{k}{x^2} \frac{\partial P}{\partial y}\left(x, \frac{k}{x}\right) \right)$$

soit

$$Q'(x_A) = 2x_A P(x_A, y_A) + x_A^2 \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x_A, y_A) - \frac{k}{x_A^2} \frac{\partial P}{\partial y}(x_A, y_A) \right) = 0$$

Le polynôme  $Q(x)$  est ainsi de degré au plus 4 et admet quatre racines distinctes dont une,  $x_A$ , multiple. C'est impossible sauf si c'est le polynôme nul. On peut d'ailleurs le vérifier en écrivant

$$Q(x) = c(x - x_A)(x - x_B)(x - x_C)(x - x_D) \quad c \in \mathbb{R}$$

et

$$Q'(x_A) = c(x_A - x_B)(x_A - x_C)(x_A - x_D) = 0$$

qui entraîne  $c = 0$  donc  $Q \equiv 0$ . On déduit

$$a = d = kc + f = ke = k^2b = 0$$

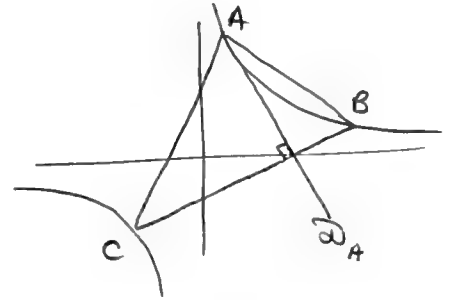
soit  $\mathcal{H}' : cxy - kc = 0$ . L'hyperbole  $\mathcal{H}'$  admet donc la même équation  $xy = k$  que  $\mathcal{H}$ , et  $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ .

① III.1.1

$$\mathcal{D}_A: \vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-a \\ y-\frac{k}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c-b \\ \frac{k}{c}-\frac{k}{b} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (c-b)(x-a) + k\left(\frac{b-c}{bc}\right)\left(y-\frac{k}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-a - \frac{k}{bc}y + \frac{k^2}{abc} = 0$$

$$\boxed{\mathcal{D}_A: x - \frac{k}{bc}y - a + \frac{k^2}{abc} = 0}$$



$$M(x,y) \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{H} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ x - \frac{k}{bc} \cdot \frac{k}{x} - a + \frac{k^2}{abc} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ abc x^2 + (k^2 - a^2 bc)x - a k^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{astrucine})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ abc \left(x-a\right) \left(x + \frac{k^2}{abc}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_A \cap \mathcal{H} = \left\{ \left(a, \frac{k}{a}\right), \left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right) \right\}}$$

En faisant une permutation circulaire et en notant  $\mathcal{D}_B$  la hauteur issue de B, on trouve encore :

$$\mathcal{D}_B \cap \mathcal{H} = \left\{ \left(b, \frac{k}{b}\right), \left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right) \right\}$$

Le point  $D \left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right)$  est donc sur  $\mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$ . C'est l'orthocentre de ABC, et il appartient à  $\mathcal{H}$ .

②

## III.1.2

1<sup>re</sup> solution:  $\mathcal{D}_A$  coupe  $\mathcal{H}$  exactement en A et D (orthocentre de ABC).  
 $\mathcal{D}_A$  n'est jamais parallèle à une asymptote de  $\mathcal{H}$  (sinon 2 pts de  $\mathcal{H}$  auraient la même tangente en A).  
 Dire que  $A=D$  revient à dire que  $\mathcal{D}_A$  coupe  $\mathcal{H}$  en un seul point A.  
 i.e. que  $\mathcal{D}_A$  est la tangente à  $\mathcal{H}$  en A.

ou l'angle  $\hat{m}$  est nul ou l'angle  $\hat{m}$  est obtus.

2<sup>e</sup> solution: Analytique

$$D=A \Leftrightarrow -\frac{k^2}{abc} = a \Leftrightarrow a^2bc = -k^2 \quad (1)$$

$\mathcal{D}_A$  admet le vecteur directeur  $\vec{u}_A\left(\frac{k}{bc}, 1\right)$  donc la pente  $\frac{1}{\frac{k}{bc}} = \frac{bc}{k}$

La tangente à  $\mathcal{H}$  en A admet la pente  $-\frac{k}{a^2}$ .

Ainsi  $\mathcal{D}_A$  est tangente à  $\mathcal{H}$ ssi  $\frac{bc}{k} = -\frac{k}{a^2}$ , i.e.ssi (1) est vraie.

④

## III.1.3

- Si les 2 hyperboles  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  se coupent en 4 pts distincts A, B, C, D, alors ABC est un triangle inscrit dans  $\mathcal{H}$ , donc son orthocentre H appartient à  $\mathcal{H}$  d'après III.1.1.  
 ABC est aussi un triangle inscrit dans  $\mathcal{H}'$ , donc  $H \in \mathcal{H}'$  pour les mêmes raisons.
- De plus  $H \notin \{A, B, C\}$ , sinon l'on aurait par ex.  $H=A$  et III.1.2 montrerait que la hauteur  $\mathcal{D}_A$  est tangente à  $\mathcal{H}$  et à  $\mathcal{H}'$ .  
 2 hyperboles qui passent par 4 pts distincts A, B, C, D et qui admettent la même tangente en A, sont nécessairement égales<sup>(\*)</sup>. D'où l'absurdité.
- Comme  $H \in (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}') \setminus \{A, B, C\}$ , on a bien  $H=D$  et le résultat annoncé.

(\*) C'est la question 3) de ucon 0036

(\*) Ce lemme peut être admis au concours. Il est démontré en ucon 0010.

**III.1.4** Soit  $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \{A, B, C\}$  et  $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$  sont tangentes en  $A$ . L'orthocentre  $D$  du triangle  $ABC$  sera dans  $\{A, B, C\}$  d'après III.1.1. Si l'on avait  $D=B$  ou  $C$ , les 2 hyperboles se coupaient en 3 points et admettraient la même tangente en 2 de ces points (et  $D=B$ , ce serait  $D=B$ ...), donc seraient confondues (cf uon 0010). Donc  $D=A$ , le triangle  $ABC$  sera rectangle en  $A$  et (III.1.2) la hauteur  $DA$  sera tangente commune à  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$ .

ou adaptation de la question ③

### ⑥ III.2.1

$$\begin{cases} \mathcal{J}: x^2 + y^2 - 2rx - 2sy + t = 0 \\ \mathcal{H}: xy = k \end{cases}$$

$$\text{d'où } x^4 + k^2 - 2rx^3 - 2skx + tx^2 = 0$$

$$x^4 - 2rx^3 + tx^2 - 2skx + k^2 = 0$$

Le produit des racines  $x_i$  de cette équation est  $k^2$ .

G suite

### III.2.2

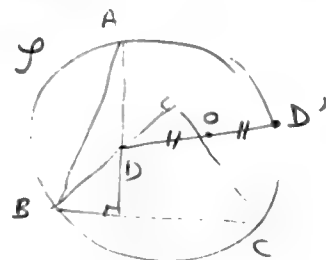
Si  $\mathcal{J} = \mathcal{C}_{ABC}$ ,  $a, b, c$  sont 3 racines distinctes de l'équation ci-dessus. La quatrième racine  $x_4$  vérifie :

$$abc x_4 = k^2 \Rightarrow x_4 = \frac{k^2}{abc}$$

Le 4<sup>e</sup> point de  $\mathcal{J} \cap \mathcal{H}$  est donc de coordonnées  $\left( \frac{k^2}{abc}, \frac{abc}{k} \right)$ .

L'orthocentre  $D$  est de coordonnées  $\left( -\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k} \right)$  symétrique du 4<sup>e</sup> pt de  $\mathcal{J} \cap \mathcal{H}$

par rapport à  $O$  : on a donc  $D' \in \mathcal{J} \cap \mathcal{H}$



### III.2.3

$\mathcal{J}$  coupe  $\mathcal{H}$  en 4 pts distincts  $A, B, C, D'$  en général, et

ici  $D' = D' = \text{symétrique de l'orthocentre } D \text{ de } ABC \text{ à } O$ . On a  $D' \in \mathcal{J} \cap \mathcal{H}$  (III.2.2).

Grâce (III.1.1) que  $D \in \mathcal{H}$

7

preuve de II.2.2 : Si  $ABC$  est équilatéral, son orthocentre  $D$  coïncide avec le centre  $\Omega$  de son cercle circonscrit et l'on sait que  $D \in \mathcal{H}$  (cf III.1.1).

preuve de II.2.4 : ~~Théorème~~ <sup>Gn a  $\Omega' \in \mathcal{J}$</sup>  puisque le symétrique  $D'$  du centre  $D$  de  $\mathcal{J}$  appartient à  $\mathcal{J}$  d'après III.2.2. De plus le symétrique de n'importe quel pt de  $\mathcal{H}$  à  $O$  est sur  $\mathcal{H}$ . Comme  $\Omega \in \mathcal{H}$ , on aura aussi  $D' = \Omega' \in \mathcal{H}$ .

III.3.1 Soit  $A, B, C, D$  sont 4 points distincts de  $\mathcal{H}$ .

- Si  $\mathcal{C} = \Delta \cup \Delta'$  où  $\Delta, \Delta'$  sont 2 droites parallèles aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , alors 2 au moins des 3 points distincts  $A, B, C$  seront sur la même droite  $\Delta$  ou  $\Delta'$ , par exemple  $A$  et  $B$ . Mais alors  $(AB)$  sera parallèle à une asymptote de  $\mathcal{H}$  avec  $A, B \in \mathcal{H}$ , c'est absurde.
- On sait déjà que  $A, B, C, D \in \mathcal{H}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une hyperbole d'asymptotes parallèles aux axes, on peut écrire

$$\begin{cases} \mathcal{H} : xy = k \\ \mathcal{C} : (x-u)(y-v) = k' \end{cases}$$

### Intersection d'un cercle et d'une ellipse.

Soit  $\mathcal{E}$  une ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ , et de sommets  $A$  et  $A'$  sur l'axe focal, avec  $AF < AF'$ . Montrer que le cercle  $\mathcal{C}(F, r)$  coupe l'ellipse  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $a - c \leq r \leq a + c$ .

Solution :

Autre solution : Calcul en coordonnées

$$M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ (x-c)^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & (1) \\ (x-c)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = r^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + c^2 - 2cx + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 - r^2 = 0$$

$$\Delta' = c^2 - \frac{c^2}{a^2}(a^2 - r^2) = \frac{c^2 r^2}{a^2}$$

$$2 \text{ solutions : } x = \frac{c \pm \frac{cr}{a}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{c} \left(1 \pm \frac{r}{a}\right) = \frac{a^2}{c} \pm \frac{ar}{c} = \frac{a(a \pm r)}{c}$$

Ainsi :

$$M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ x = \frac{a(a+r)}{c} \text{ ou } \frac{a(a-r)}{c} \end{cases}$$

$$\text{et } \mathcal{E} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{a(a+r)}{c}\right)^2 \geq 0 \\ \text{ou} \\ 1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{a(a-r)}{c}\right)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq \frac{(a+r)^2}{c^2} \\ \text{ou} \\ 1 \geq \frac{(a-r)^2}{c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 \geq (a+r)^2 & (a) \\ \text{ou} \\ c^2 \geq (a-r)^2 & (b) \end{cases}$$

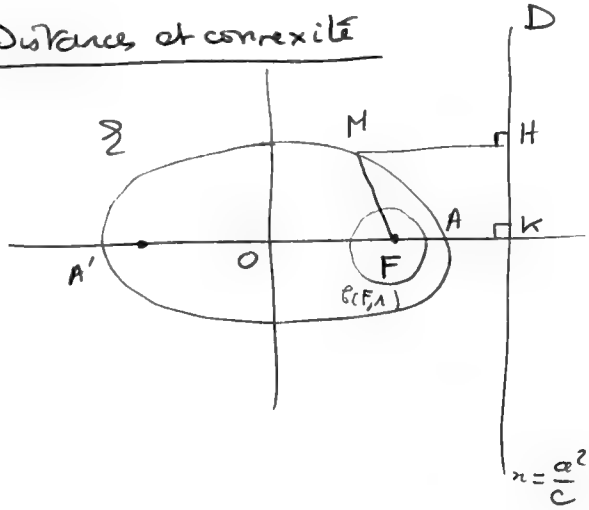
Or  $c^2 \geq (a+r)^2 \Leftrightarrow c^2 \geq a^2 + r^2 + 2ar \Leftrightarrow 0 \geq b^2 + r^2 + 2ar$ , d'inégalité (a) est impossible. On a donc :

<sup>0</sup>[ucon0044] v1.00β Dany-Jack Mercier

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow |a-r| \leq c \Leftrightarrow a-c \leq r \leq a+c \quad \square$$

Soit  $\mathcal{E}$  une ellipse de foyers  $F, F'$  et de sommets  $A, A'$  sur l'axe focal, avec  $AF < AF'$ . Mq le cercle  $\mathcal{C}(F, r)$  coupe  $\mathcal{E}$  si  $a - c \leq r \leq a + c$

- 2-solution: Distances et connexité



- On montre que la distance minimum de  $F$  à un pt  $M$  de  $\mathbb{R}$  est atteinte pour  $M=A$ . En effet :

$$\forall M \in \mathcal{Z} \quad MF = e MH$$

et donc  $\inf \{MF / M \in \mathbb{Z}\} = e \inf \{MH / M \in \mathbb{Z}\}$

Mais si  $M(x, y)$ ,  $MH = \frac{a^2}{c} - x$  et  $x$  décrit  $[-a, a]$ , donc  $MH$  atteint son minimum pour  $x = a$ , ie quand  $M = A$ . Alors :

$$\sup \{MH/ME\} = AK = \frac{a^2}{c} - a$$

$$\text{Sat } \{ \text{Min} \{ MF / M \in \mathcal{F} \} \} = e \left( \frac{a^2}{c} - a \right) = a - c = d(F, \mathcal{F})$$

- De  $\hat{m}$ , on montrerait que  $\max \{MF / M \in \mathcal{E}\} = A'F = c + a$

- Ce qui précède montre clairement que si  $r < a - c$  ou  $r > a + c$  alors  $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}(F, r) = \emptyset$ .

- Pour tout  $\lambda \in [a-c, a+c] = [\min\{MF/ME\}, \max\{MF/ME\}]$  il existe  $ME \in \mathcal{E}$  tq  $\lambda = MF$  ie  $\mathcal{E} \cap \mathcal{G}_{\lambda} \neq \emptyset$ .

2. effet,  $f: \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue,  $\mathcal{Z}$  est connexe  
 $M \longmapsto MF$  de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$  de premier genre

donc  $f(\mathbb{Z})$  est connexe. Comme  $\text{Max} \{f(M) / M \in \mathbb{Z}\} = a + c$ ,  $\text{Min} \{f(M) / M \in \mathbb{Z}\} = a - c$   
on a donc  $f(\mathbb{Z}) = [a - c, a + c]$ .  $\square$



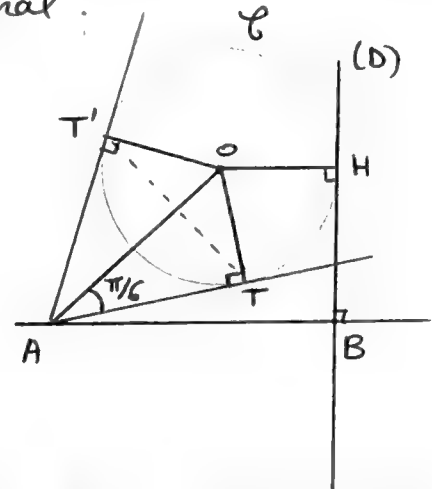
Recherche de lieu géométrique

Dans le plan, soient A et B 2 pts distincts, et (D) la perpendiculaire en B à (AB).

Déterminer l'ensemble des points O centres des cercles  $\mathcal{C}$  tels que :

- D soit tangente à  $\mathcal{C}$
- les pts de contact T et T' des 2 tgtes à  $\mathcal{C}$  passant par A sont tels que ATT' soit un triangle équilatéral.

(réf. Fractale 92 p 275)



Sol: Nécessairement  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{OT}{OA} = \frac{OH}{OA}$

d'où  $\frac{OA}{OH} = 2$  et O sera sur l'hyperbole

$\mathcal{H}$  de foyer A et de directrice (D).

Réc., si O est sur  $\mathcal{H} \doteq \{M / \frac{MA}{MH} = 2\}$ , notons  $\mathcal{C}$  le cercle de centre O et de rayon OH.

$OA = 2OH$  donc A est à l'extérieur de  $\mathcal{C}$ . Notons T et T' les points de contact des tangentes à  $\mathcal{C}$  issues de A. Alors

$$\sin \widehat{TAO} = \frac{OT}{OA} = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{TAO} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \widehat{TAT'} = \frac{\pi}{3}$$

et ATT' sera équilatéral.

Cel: O décrit  $\mathcal{H}$  en entier

CPFO

Objectifs: s'entraîner à l'analyse puis à la synthèse

Outils: trigonométrie, définition des coniques par foyer et directrice

Technique: supposer le pb résolu pour faire un dessin, et trouver ainsi des conditions nécessaires sur O.

Bac 1989 (ext.)

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $(P)$  le plan d'équation  $3x + 4z - 5 = 0$  et  $\Gamma$  l'ensemble des pts du plan  $xOy$  équidistants de  $(P)$  et de l'origine.

a) Calculer la distance d'un pt  $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  à  $(P)$ . En déduire que  $\Gamma$  admet l'équation  $x^2 + y^2 = \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

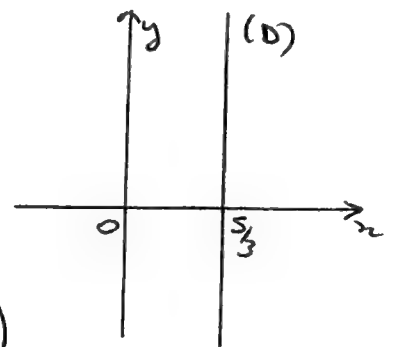
b) Soit  $(D) = (P) \cap xOy$ . Mq  $\Gamma$  est une conique de foyer  $O$  et de directrice associée  $(D)$ . Déterminer son excentricité.

Sol :

$$a) d(M, (P)) = \frac{|3x_0 + 4z_0 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x_0 + 4z_0 - 5|}{5}$$

$$\text{donc } M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma \Leftrightarrow \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2 = x^2 + y^2$$

$$b) (D): \begin{cases} 3x + 4z - 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ie } \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$



Dans le plan  $xOy$ ,  $(D)$  est d'équation  $x = \frac{5}{3}$  :

Soit  $H$  la proj. de  $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in xOy$  sur  $D$ . On a  $H\begin{pmatrix} 5/3 \\ y \end{pmatrix}$

Il faut montrer que  $\Gamma = \{M \in xOy \mid \frac{MO}{MH} = e\}$  avec  $e \in \mathbb{R}_+^*$  convenable.

$$\text{On a : } \begin{cases} MO^2 = x^2 + y^2 \\ MH^2 = \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 \end{cases}$$

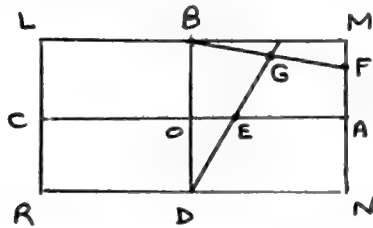
donc la a) entraîne :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{9}{25} MH^2 \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{3}{5}$$

$\Gamma$  sera l'ellipse de foyer  $O$ , de directrice  $D$  et d'excentricité  $\frac{3}{5}$ .

Objectif : retourner et utiliser la déf. d'une conique par foyer et directrice. exprimer des distances en fct des coordonnées.

① Construction d'une ellipse inscrite dans un rectangle (réf. Repères n°6 de jan. 92).



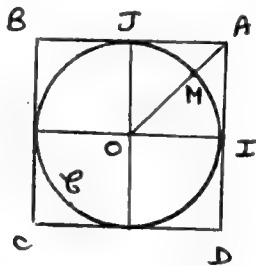
E et F sont resp. sur les segments  $[OA]$  et  $[MA]$  et vérifient  $\frac{OE}{OA} = \frac{MF}{MA}$ .

Hq G est sur l'ellipse inscrite dans le rectangle LMNR.

Obj. : Recherche d'équations (cart. ou param.) de droites, des coord. de l'N de 2 dtes et utilisation de l'éq. cart.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  d'une ellipse.

(T Conique)

② Construction d'une ellipse à l'aide de 8 points et 8 tangentes



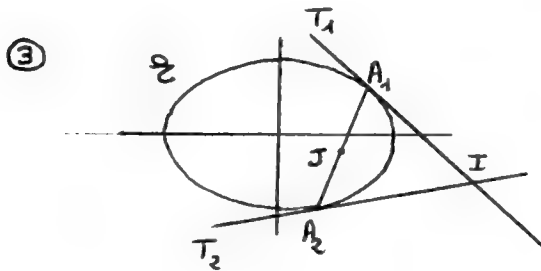
Calculer  $\frac{OM}{OA}$ . Que dire de la dte (IJ) et de la tge au cercle C en M?

Application : Construire une ellipse à l'aide de 8 points et 8 tges.

Obj. : Mettre en œuvre les règles du dessin en perspective  
Mieux définir le tracé de l'ellipse

Contexte : utilisable dès la 3ème pour tracer un cône de révolution en perspective.

(T Coniques)



J est le milieu de  $[A_1A_2]$ , où  $A_1, A_2$  désignent les pts de contact des tges  $T_1, T_2$  à l'ellipse C.

On suppose que  $T_1$  coupe  $T_2$  en I.

Hq C est invariante dans la sym.  $\parallel_a(IJ)$   
 $\parallel_a(A_1A_2)$ .

(Ind. Se ramener au cas du cercle par affinité orthogonale)

Sof : Capes 90, 2<sup>comp.</sup>, D.1.a, AG8

Obj. : Apprentissage de la démonstration - Savoir fractionner ce que l'on doit prouver, en envisageant d'abord le cas du cercle ici.  
• Utiliser l'affinité transformant un cercle en une ellipse.

Contexte : ex. difficile à traiter en TP avec des ind. de recherche. On admettra que l'affinité conserve les milieux.

Def |  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \vec{E}$   $t_0 \in A$  et  $\vec{\ell} \in \vec{E}$ .  
 $f$  est dérivable en  $t_0$  de vecteur dérivée  $\vec{\ell}$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \vec{\ell}$   
 On note  $f'(t_0) = \vec{\ell}$

Th | Si  $f$  est donnée par  $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$  dans  $B$  orthornormée de  $\vec{E}$ , alors  
 on a :  
 1)  $f$  est dérivable en  $t_0$  et  $f'(t_0) = \vec{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$   
 2)  $\forall i \in [1, n]$   $f_i$  est dérivable en  $t_0$  et  $f'_i(t_0) = \ell_i$

preuve : cf théorème sur les limites.

Remarque : Comme pour les fct numériques, on définit la fonction dérivée par  
 $f': A \rightarrow \vec{E}$  et la dérivée n-ième par  $f^{(n)}(t_0) = (f^{(n-1)})'(t_0)$   
 $t \mapsto f'(t)$

ex :  $f(t) = 2t^2 + (t^3 + 2t) \vec{j} + 5t^2 \vec{k}$   
 $f'(t) = 4t \vec{i} + (3t^2 + 2) \vec{j} + 10t \vec{k}$   
 $f''(t) = 4 \vec{i} + 6t \vec{j} + 10 \vec{k}$   
 $f'''(t) = 6 \vec{j}$   
 $f^{(4)}(t) = \vec{0}$

Propriétés :

Pro1 |  $t_0 \in \mathbb{R}$   $f$  et  $g$  dérivables en  $t_0 \Rightarrow \begin{cases} (f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0) \\ (\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0) \end{cases}$

(raisonner coord. par coord.)

Pro2 | Soit  $\varphi: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $t_0$  et  $f: A \rightarrow \vec{E}$  dérivable en  $t_0$ .  
 Alors  $\varphi f: t \mapsto \varphi(t) f(t)$  est dérivable en  $t_0$  et  
 $(\varphi f)'(t_0) = \varphi'(t_0) f(t_0) + \varphi(t_0) f'(t_0)$

Pro3 |  $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{f} \vec{E}$  et si  $\varphi$  est dérivable en  $t_0$ , et  $f$  en  $\varphi(t_0)$ , alors  
 $f \circ \varphi$  est dérivable en  $t_0$  et :  
 $(f \circ \varphi)'(t_0) = \underbrace{f'(\varphi(t_0))}_{\in \vec{E}} \cdot \underbrace{\varphi'(t_0)}_{\in \mathbb{R}}$

Pro4 | Si  $f$  et  $g: A \rightarrow \vec{E}$  sont dérivables en  $t_0$ , alors  $f \cdot g: A \rightarrow \mathbb{R}$  est  
 dérivable en  $t_0$  et :  $(f \cdot g)'(t_0) = f'(t_0) \cdot g(t_0) + f(t_0) \cdot g'(t_0)$

## Tangentes

Définition: Notons  $\mathcal{C} = \{M \in E / \vec{OM} = f(t)\}$ . Si  $f$  est dérivable en  $t_0$  et si  $f'(t_0) \neq \vec{0}$ , alors  $\mathcal{C}$  admet une tangente en  $M_0(t_0)$  de vecteur directeur  $f'(t_0)$ .

### III Application: tangentes aux coniques et aux hélices circulaires.

#### 1° Cas fondamental

$\theta$  = mesure réelle de l'angle  $(\vec{i}, \vec{u})$

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$$

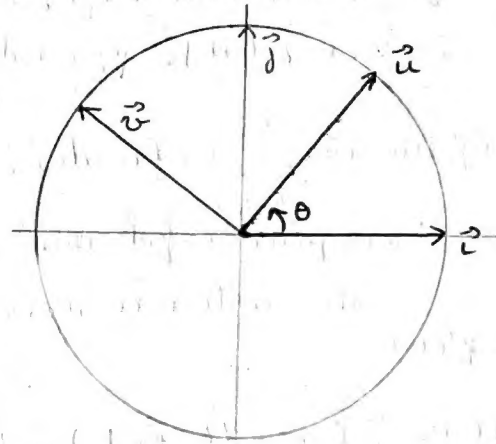
- Si  $\theta$  est le paramètre réel :

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{u}'(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \vec{j}$$

- Si  $\theta$  est fonction de  $t$  :

$$\vec{u}'(t) = \vec{u}'(\theta) \times \theta'(t) = \theta' \cdot \vec{v}$$



#### 2° Tgt en un point d'une conique

##### a) Parabole

C'est l'ensemble des points à égale distance d'un point fixe nommé Foyer et d'une droite fixe nommée "directrice", le point fixe n'appartenant pas à la droite fixe.

Soit  $(\vec{i}, \vec{u})$  mesurée par  $\theta \in \mathbb{R}$ .

On a  $\vec{FM} = r \vec{u}$  avec  $r = f(\theta) > 0$

d'où :

- (1)  $\vec{FM}' = r' \vec{u} + r \vec{v}$  où  $\vec{v} = \vec{u}'(\theta)$  est le vecteur normé directement orthogonal à  $\vec{u}$ .

- (2)  $\vec{KM} = x \vec{i} + y \vec{j}$  donne le même vecteur dérivée (cf.  $\vec{KM} = \vec{KF} + \vec{FM}$ )

Donc

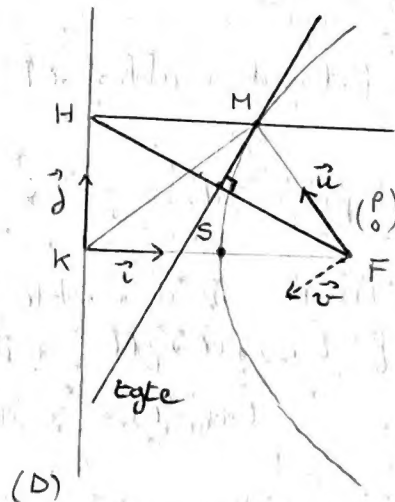
$$(\vec{KM})' = x' \vec{i} + y' \vec{j}$$

Comme  $\vec{KM} = \vec{MF}$ , on a :  $x = r \Rightarrow \vec{KM}' = r' \vec{i} + y' \vec{j}$  (2')

(1) et (2') donnent :

$$\vec{FM}' = (r' \vec{u}) + r \vec{v} = (r' \vec{i} + y' \vec{j})$$

Les vecteurs entourés sont les proj. orth. de  $\vec{FM}'$  sur les droites  $(MF)$  et  $KF$ . Ils ont



to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

to section

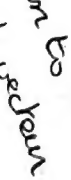
to section

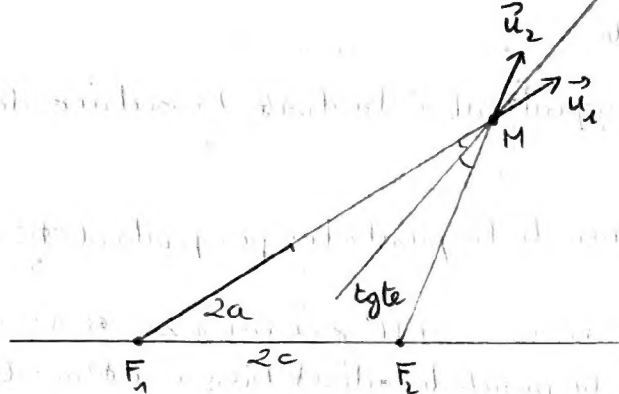
to section

to section

to section

to section





#### d) Hélice circulaire

C'est une courbe de  $\mathbb{R}^3$  d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{en repère } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ orthonormé})$$

Notons (H) cette hélice.

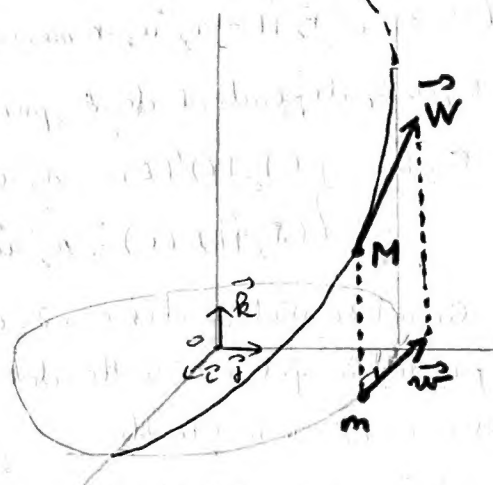
$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{OM}' = -a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b \vec{k}$$

On remarque que, si m désigne le pt projection orth. de M sur  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , et (C) le cercle de  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de centre O de rayon a,  $\vec{w} = -a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j}$  est le vect. dir. de la tangente à m à (C).

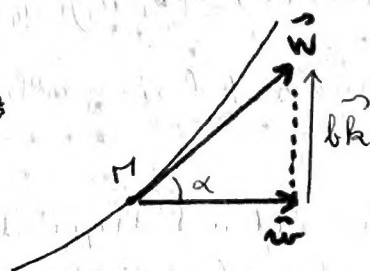
Par suite :  $\vec{OM}' = \vec{w} + b \vec{k}$

donc  $\vec{w}$  = projection orthogonale sur le plan de (C) du vecteur  $\vec{OM}'$ .



NB : pas de l'hélice = distance entre 2 points B consécutifs qui se trouvent sur la même verticale.

Ainsi :  $\begin{cases} a \cos t = a \cos t' \\ a \sin t = a \sin t' \end{cases} \Leftrightarrow t \equiv t' \pmod{2\pi}$



NB :  
 $\tan \alpha = \frac{b}{a}$   
 $\forall M \in (H)$

entre 0 et  $2\pi$ , la cote de M(t) aura varié de  $\boxed{z = b2\pi}$  (= pas p de l'hélice)